



Comité de Liaison des Géomètres Européens
Council of European Geodetic Surveyors
Vijeće Europskih geodeta

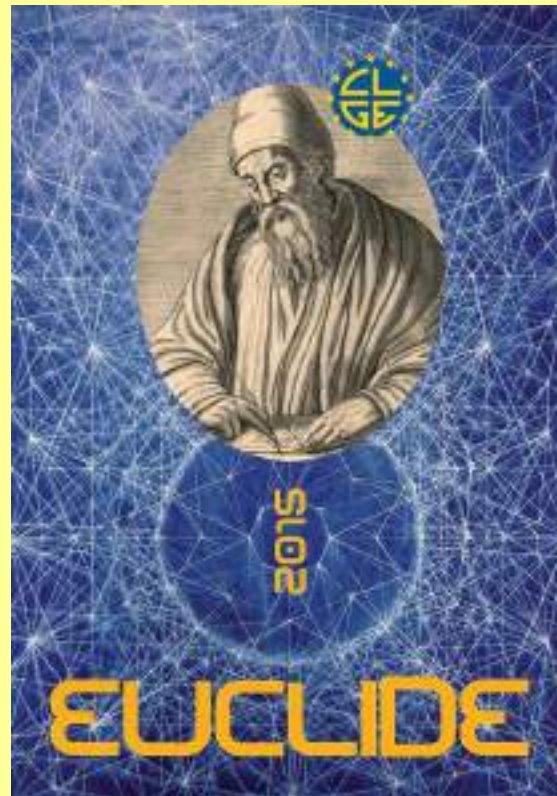
Hrvatska komora ovlaštenih
inženjera geodezije



Europski dan geodezije i geoinformacija

Euklid - europski geodet godine 2015.

Željko Hećimović



Sadržaj:

- **Euklidov životopis**
- **Vremensko okruženje u kojem se Euklid javlja**
- **Euklidovo djelo**
- **Euklidov utjecaj na temeljna znanja, suvremenike i na razvoj civilizacije**
- **Euklidova ostavština**

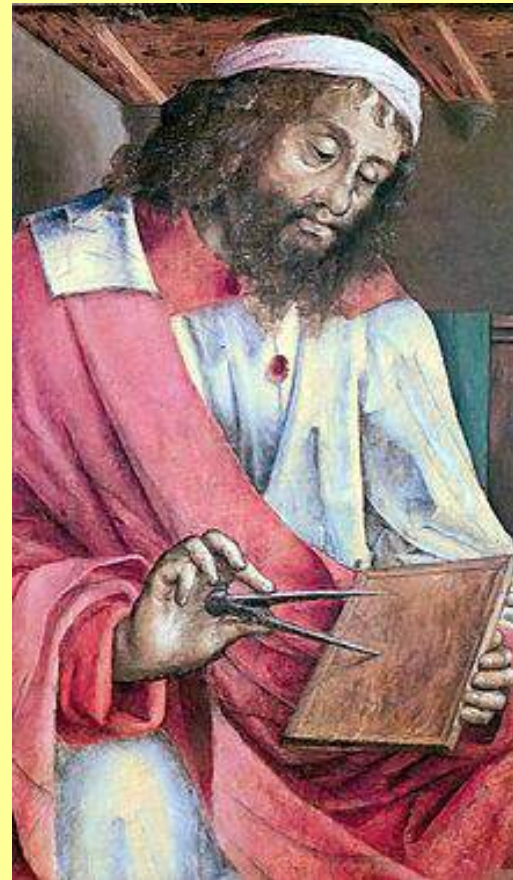
Sadržaj:

- **Euklidov životopis**
- Vremensko okruženje u kojem se Euklid javlja
- Euklidovo djelo
- Euklidov utjecaj na temeljna znanja, suvremenike i na razvoj civilizacije
- Euklidova ostavština

Euklid (grč. Εὐκλείδης, Eukleides) grčki matematičar iz Aleksandrije (Egipat)

- O životu Euklida se malo zna.
- Zapisi grčkog filozofa **Proclusa** (oko 410. – 485.) o poznatim grčkim matematičarima daje nekoliko činjenica.
- Pretpostavlja se da je Euklid živio u razdoblju od 330. do 275. pr. Kr.
- Studirao je u Platonovoj akademiji u Ateni.
- Oko 300. pr. Kr. odlazi u Aleksandriju (Egipat).
- Živio je u Aleksandriji u vremenu vladara Ptolemeja I Sotera (323. - 285. pr. Kr.)
- Najveći utjecaj na njegov rad su imali filozofi Platon i Aristotel.

- Predavao je u Egiptu i osnovao je vlastitu akademiju.
- Postoji još nekoliko povijesnih komentara koje se povezuju za život Euklida. Među najvažnijim je Pappausov komentar (4. st.) da je Apollonius (3. st. pr. Kr.) studirao sa studentima Euklida iz Aleksandrije.



Sadržaj:

- Euklidov životopis
- **Vremensko okruženje u kojem se Euklid javlja**
- Euklidovo djelo
- Euklidov utjecaj na temeljna znanja, suvremenike i na razvoj civilizacije
- Euklidova ostavština

- Prvi zapisi da su antički ljudi već počeli primjenjivati matematička pravila i tehnike za premjer zemlje, gradnju objekata i mjerenje spremnika datira iz vremena procvata civilizacija Egipta i Mezopotamije (oko 3100. pr. Kr.).
- Razlog za razvoj geometrije je u rješavanju svakodnevnih problema te religioznim obredima.
- Prema Herodotovoj povijesti (5. stoljeće pr. Kr.), Egipćani su uveli premjer da bi da bi mogli ponovo utvrditi vlasništva nad zemljištem nakon godišnjih poplava Nila. Isto tako se javljala potreba poznavanja veličine spremnika ulja i žitarica te potrebe gradnje nasipa i piramida.



















Najteža stvar u životu je upoznati samog sebe.
Thales

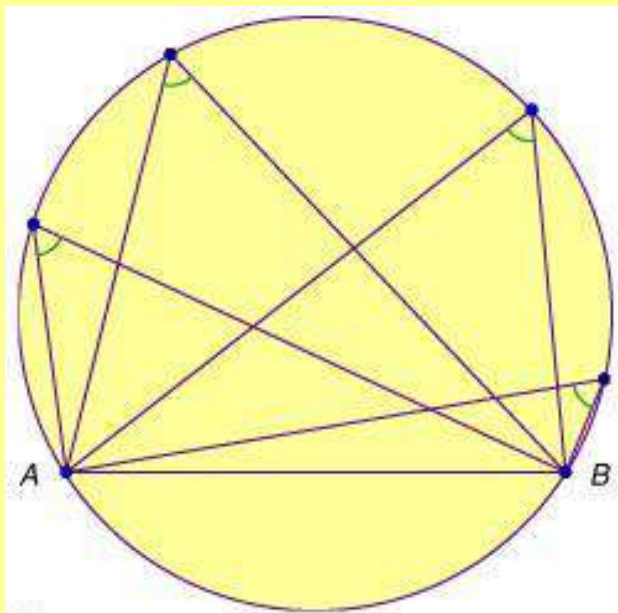
Počeci geometrije



Babilonski tablet

Polygonal Numbers					
triangular numbers		1	square numbers		1
		3			4
		6			9
		10			16
pentagonal numbers		1	hexagonal numbers		1
		5			6
		12			15
		22			28

Poligonalni brojevi: U antičkoj Grčkoj se često koristilo slaganje kamenčića u razne geometrijske oblike da bi se razlučili aritmetički ali i mistični odnosi između brojaka.

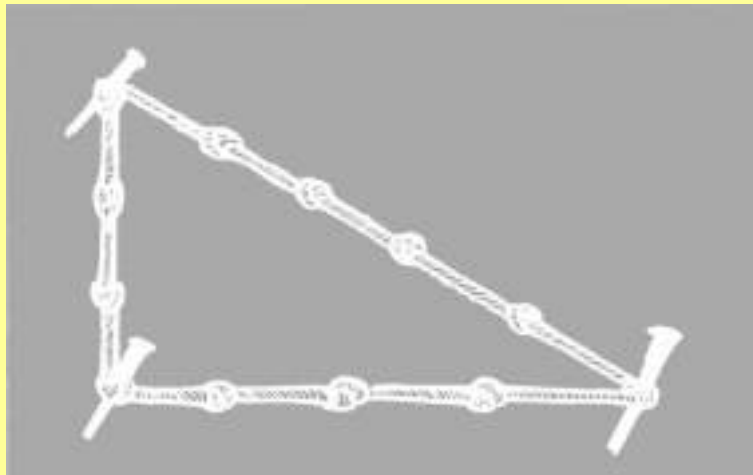


Thales iz Mileta (oko 600. pr. Kr.)

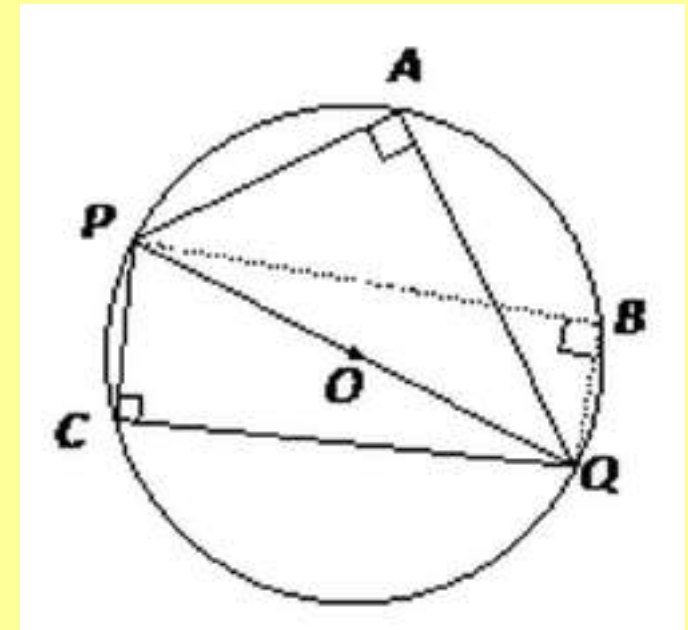
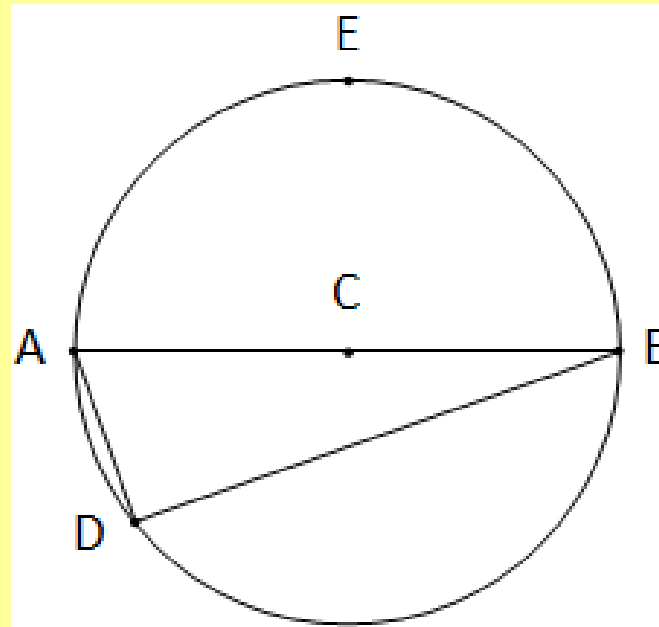
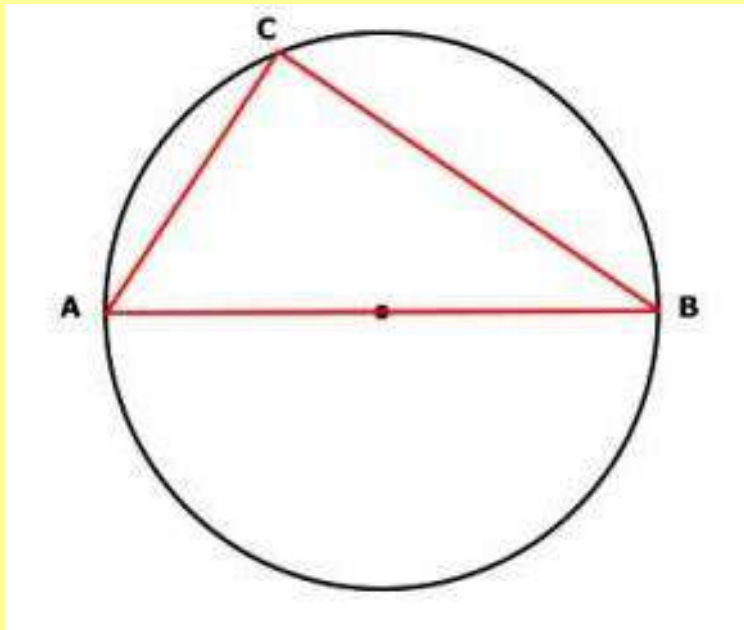
Za spojnicu bilo kojih točaka na krugu (AB) svi kutovi iz bilo koje druge točke na polukrugu prema točkama A i B su jednaki (ovo je među prvim zabilježenim analizama geometrijskih odnosa).

Iskolčenje pravog kuta

- Antički graditelji i mjernici su morali biti sposobni na zahtjev iskolčiti pravi kut u prirodi (piramide, hramovi, svetišta i dr.).
- Na raspolaganju si imali konopac (šestar) kojim su crtali kružnice i lukove te štap ili konopac za mjerenje duljina (ravnalo).
- Metode iskolčenja koje su koristili u Egiptu su mjernicima (geometrima) dale nadimak "**povlakači konopca**".
- Pravi kut su iskolčavali na način da su na užetu zavezali čvorove tako da kada drže uže za čvorove i napnu uže ono formira pravi kut.



- Za iskolčenje pravog kuta su koristili uže dugo 12 jedinica duljine. Napravili bi čvor na 3 jedinice duljine od jednog kraja užeta i 5 jedinica od drugog kraja te bi zavezali oba kraja užeta tako da uže čini neprekinutu cjelinu. Držanjem za čvorove i navlačenjem konopca formira se pravokutni trokut.
- U Indiji u vjerskim zapisima navodi se također "pravilo konopca" koje se koristilo da bi se ispravno odredio položaj oltara za žrtvovanje. Koristile su se oznake na konopcu (stranice trokuta) u omjerima (3, 4, 5) i (5, 12, 13).



Etimologija riječi geometrija:

Geometrija: od grčke riječi **γεωμετρία** ili *geometron*

- **geo** - označava odnos prema zemlji (Zemlji)
- **metron** - mjerenje

Geometrija je dio matematike koja se bavi pitanjima oblika, veličine, relativnih položaja tijela i svojstava prostora.

geometrija -> mjerenje zemlje -> geometar

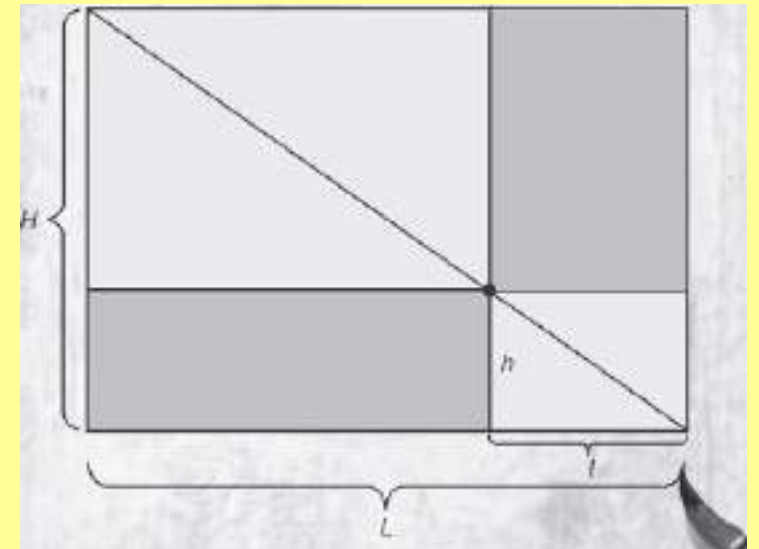
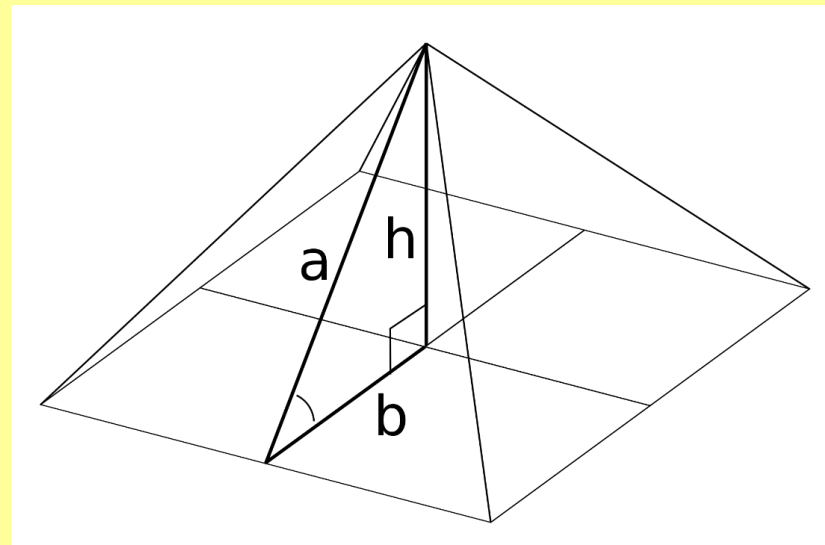
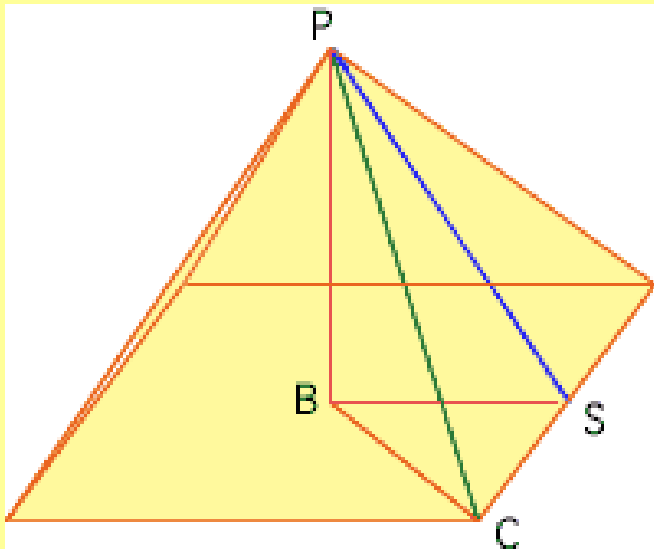
Etimologija riječi geodezija:

Geodezija: od grčke riječi **γεωδαισία** ili *geodaisia*

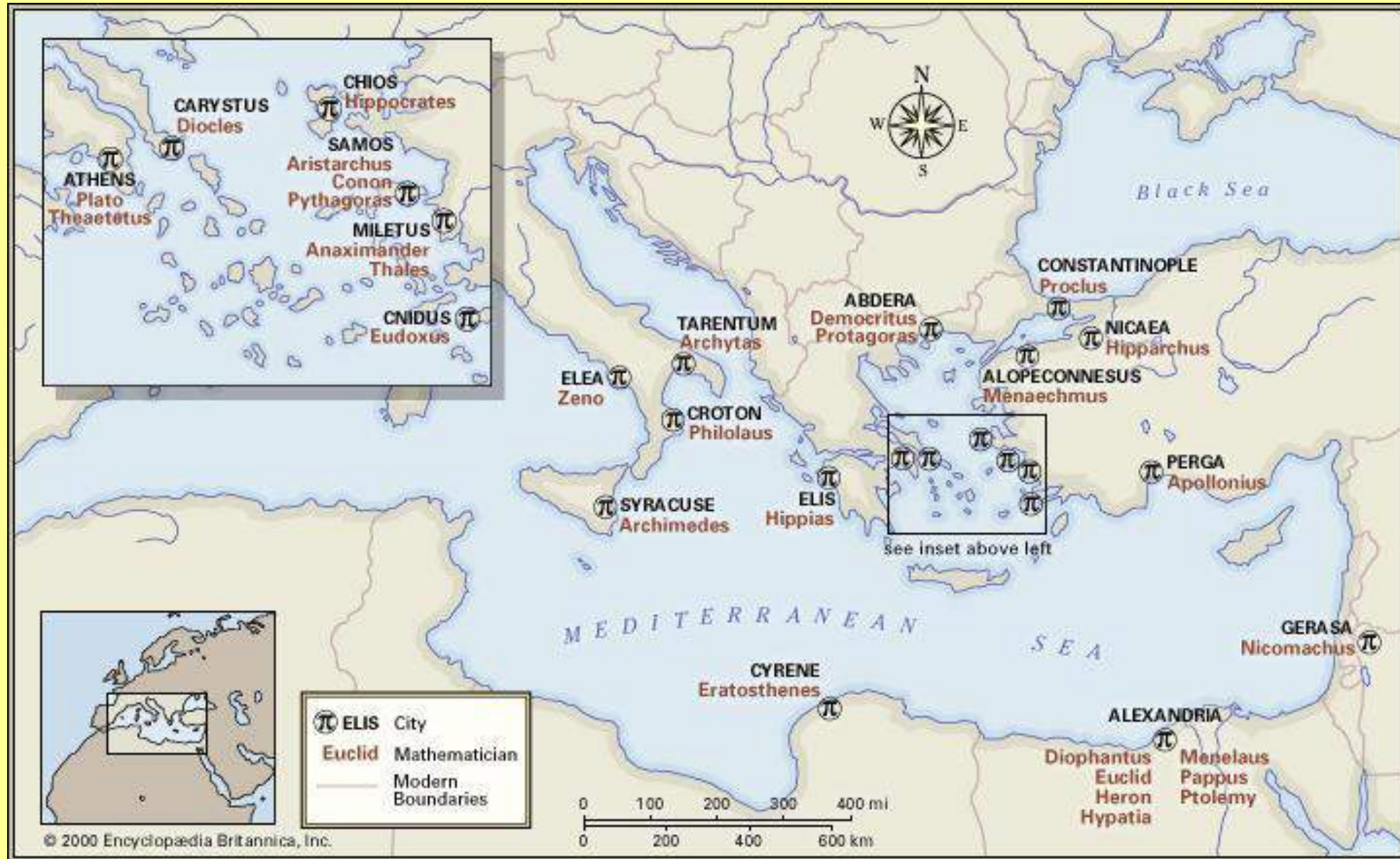
- **geo** - označava odnos prema zemlji (Zemlji)
- **daisia** (daiesthai) - dijeliti

geodezija -> dijeljenje zemlje

- Thales iz Mileta (6. st. pr. Kr.) je izumio način kako da mjeri nepristupačne visine, kao što su visine piramida.
- Egipatski notar Ahmes koji je kopirao Rhindov papirus (oko 1650. pr. Kr.) (87 matematičkih problema) mogao je izračunati volumen cijele ili krnja piramide i horizontalnu udaljenost povezanu sa vertikalnom linijom te odrediti nagib stranica piramide.
- U staroj Kini su nepristupačne visine i udaljenosti mjerili primjenom komplementarnih trokuta koji su ekvivalent grčkoj metodi.



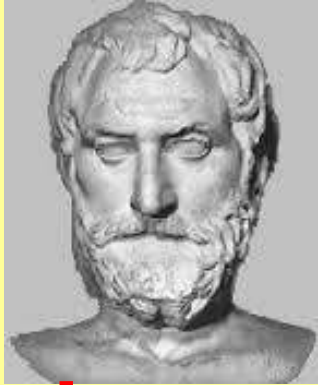
Antički matematičari Grčko-Rimskog svijeta: od 600 pr. Kr. do 400 pr. Kr.



Važniji matematičari iz perioda antičke grčke geometrije

THALES

Apstraktna geometrija



575 pr.Kr.

ZENO

Logika i paradoksi



460 pr.Kr.

EUKLID

Geometrija



300 pr.Kr.

ARHIMED

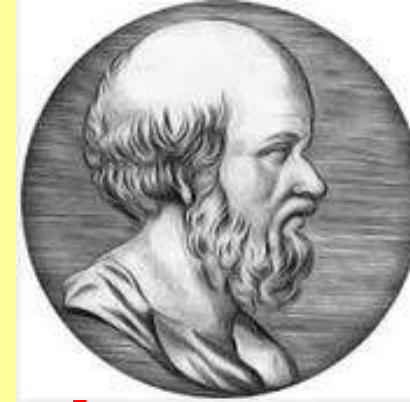
Omjeri volumena



240 pr.Kr.

ERATROSTHENES

Prim brojevi, zakrivljenost Zemlje



220 pr.Kr.

530 pr.Kr.



PITAGORA

Brojevi.
Pravokutni trokut.

380 pr.Kr.



EUDOXUS

Iracionalni brojevi

250 pr.Kr.



DIOPHANTUS

Inverzne operacije

220 pr.Kr.



APOLLONIUS

Trigonometrija

Aleksandrijska knjižnica

- Knjižnicu je zasnovao vladar Egipta Ptolomej I Stoter.
- Jedna od najvećih i najvažnijih knjižnica antičkog svijeta.
- Aleksandrijska knjižnica je djelovala kao glavni centar znanja od 3. st. pr. Kr. do Rimskog osvajanja Egipta u 30-im god. pr. Kr.
- Više slavni mislioca antičkog svijeta je studiralo u Aleksandrijskoj knjižnici.
- Aleksandrijska knjižnica je utjecala na Euklidov rad.



Sadržaj:

- Euklidov životopis
- Vremensko okruženje u kojem se Euklid javlja
- **Euklidovo djelo**
- Euklidov utjecaj na temeljna znanja, suvremenike i na razvoj civilizacije
- Euklidova ostavština

- Napisao je više djela, od kojih neka nisu sačuvana i poznata su samo po naslovu.
- Euklid je pisao o geometriji, astronomiji i optici, a vjerojatno i o mehanici i muzici.
- Samo su Elementi intenzivno kopirani i prevedeni te su zbog toga ostali dobro sačuvani.
- Najpoznatija Euklidova djela su:
 - **ELEMENTI** - geometrija kao znanost o prostoru u 13 knjiga,
 - **DATA** - o uvjetima zadavanja matematičkog objekta,
 - **OPTIKA** - optika i teorija perspektive,
 - **FENOMENI** - opisi fenomena,
 - **KATOPTRIKA** - rasprava o odbijanju i lomu svjetlosti te nastanku slika u ravnim i konkavnim zrcalima.



Knjige Elemenata (13 knjiga)

- **Ravninska geometrija (knjige 1-6)**

Knjiga 1 - temeljna svojstva geometrije, Pitagorin poučak, jednakost kutova, paralelnost, zbroj kutova u trokutu;

Knjiga 2 - površine trokuta i četverokuta, zlatni rez;

Knjiga 3 - krugovi, kružnice i njihova svojstva, odsječci, tangente;

Knjiga 4 - konstrukcijom kružnice opisanih i upisanih trokuta;

Knjiga 5 - omjeri veličina;

Knjiga 6 - primjena omjera u geometriji, sličnost trokuta;

- **Teorija brojeva (knjige 7-9)**

Knjiga 7 - teorija brojeva (djeljivost, prim brojevi);

Knjiga 8 - geometrijski redovi;

Knjiga 9 - kombinira rezultate sedme i osme knjige – beskonačnost prim brojeva, suma geometrijskog reda;



Knjige Elemenata

- Eudoxusova teorija iracionalnih brojeva (knjiga 10)

Knjiga 10 - nesumjerljivost i iracionalni brojevi;

- Stereometrija (3D Euklidska geometrija) (knjige 11-13)

Knjiga 11 - primjena rezultata prve do šeste knjige na prostor;

Knjiga 12 - oplošja i volumeni stošca, piramide, valjka, sfere;

Knjiga 13 - generalizacija četvrte knjige na prostor, upisivanje pet Platonovih pravilnih tijela u sferu.

- U Elementima ima 118 definicija (u prvoj knjizi 23), 5 postulata i 5 aksioma.
- To su tvrdnje koje su usvojene bez dokaza, a onda se na osnovu njih dokazuju propozicije.
- Elementi su potpuno teorijsko djelo. U njima nema računa niti primjena u praksi.



Definicije

Prvih pet definicija pojmova (knjiga I) koji se koriste u Elementima (u svim knjigama ima 118 definicija):

- Točka je ono što nema dijelova.
- Crta je duljina bez širine.
- Krajevi crte su točke.
- Dužina je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.
- Ploha je ono što ima samo duljinu i širinu.
- ...

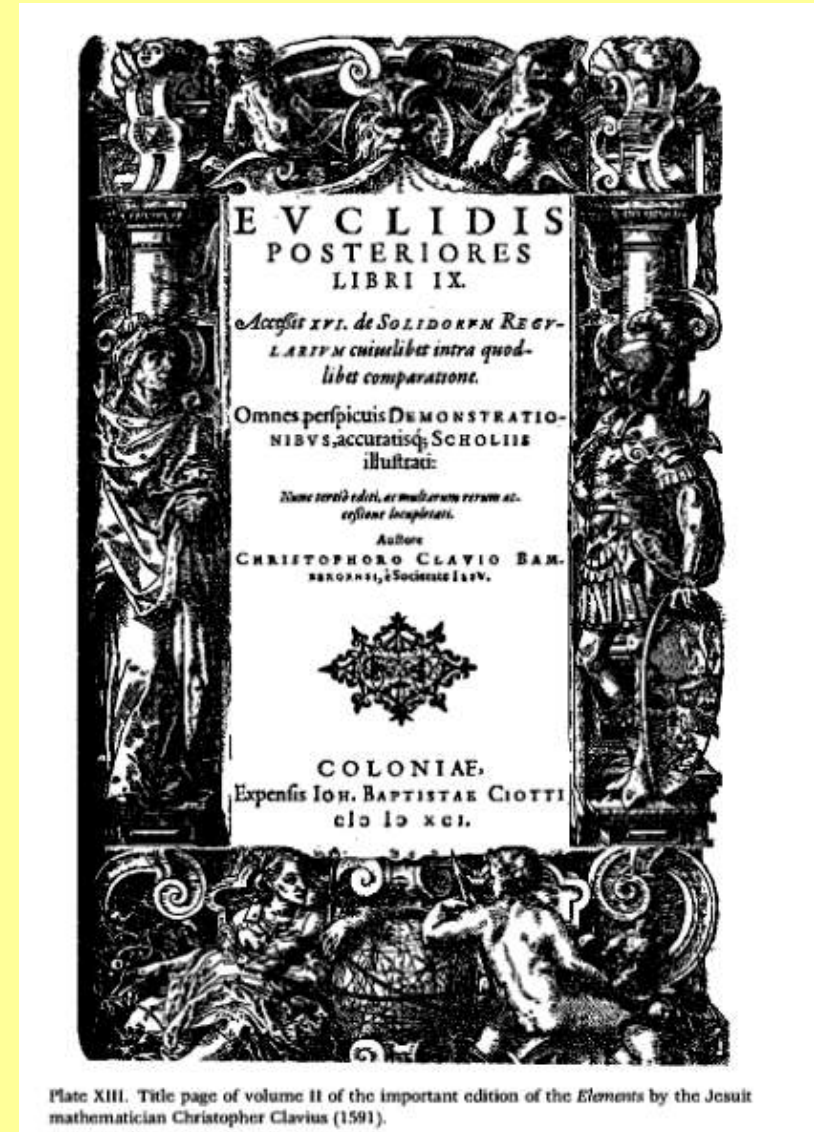
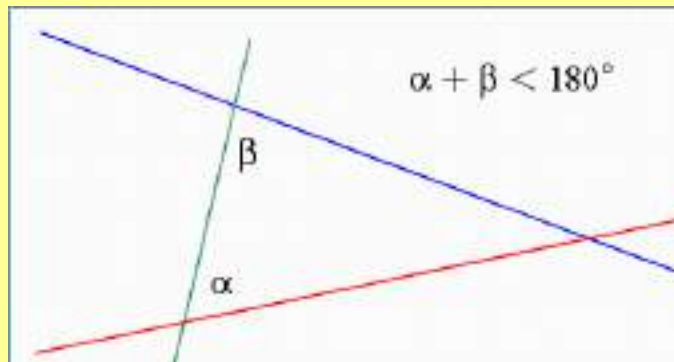


Plate XIII. Title page of volume II of the important edition of the *Elements* by the Jesuit mathematician Christopher Clavius (1591).

Euklidovi postulati - tvrdnje koje se daju bez dokazivanja

1. Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.
2. I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.
3. I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.
4. I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.
5. I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.



Euklidovi aksiomi - tvrdnje koje se daju bez dokazivanja

1. Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.
2. Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.
3. Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostatci su jednaki.
4. Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake.
5. Cjelina je veća od dijela.

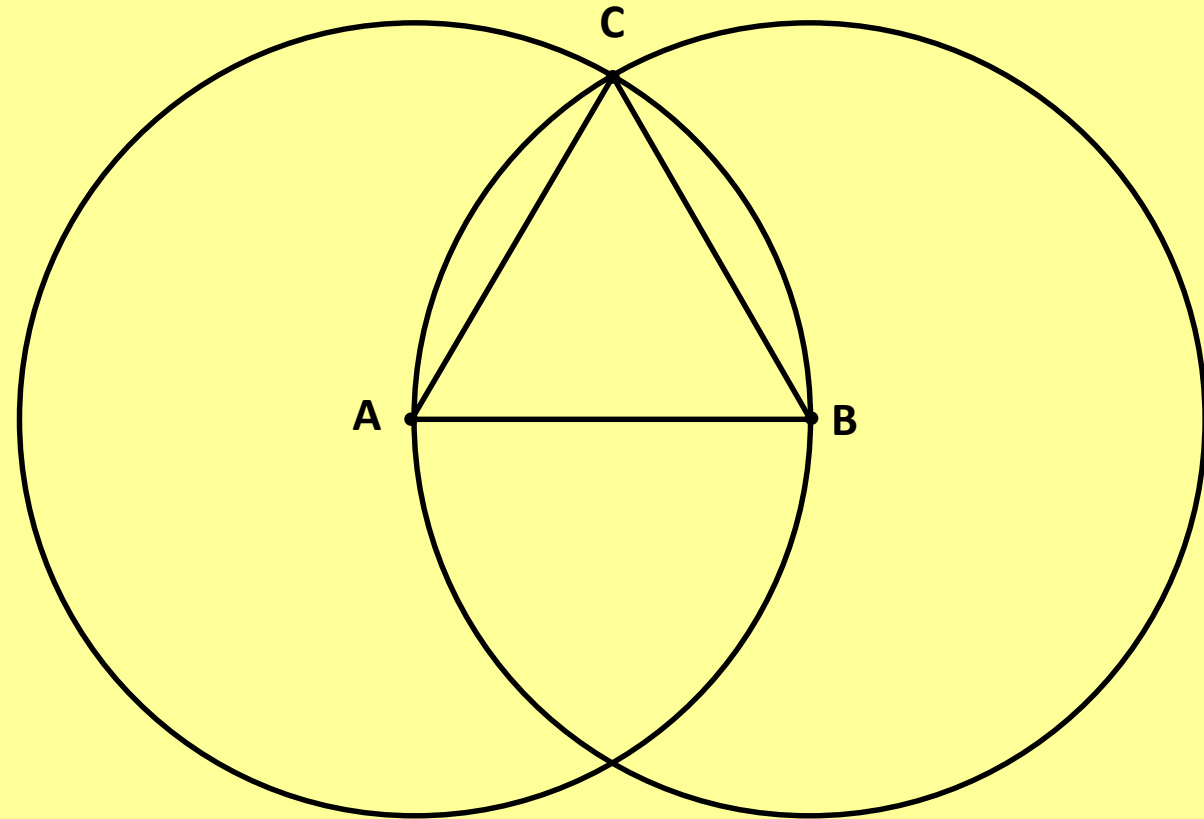
Ptolemej, vladar Egipta je upitao Euklida dali postoji lakši put do geometrije od puta kroz njegove knjige Elemenata, a Euklid mu je odgovorio da nema kraljevskog puta do geometrije.

Proclus

Propozicija 1 (knjiga I): Konstruiraj jednakostranični trokut na dužini AB.

Opis konstrukcije :

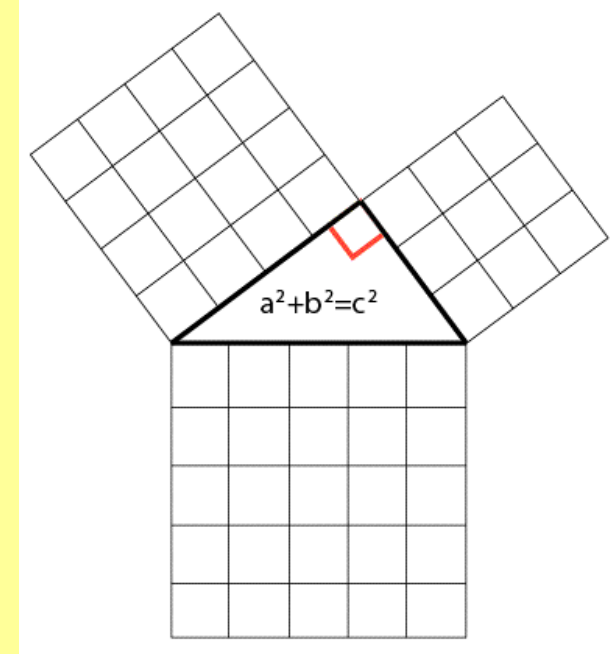
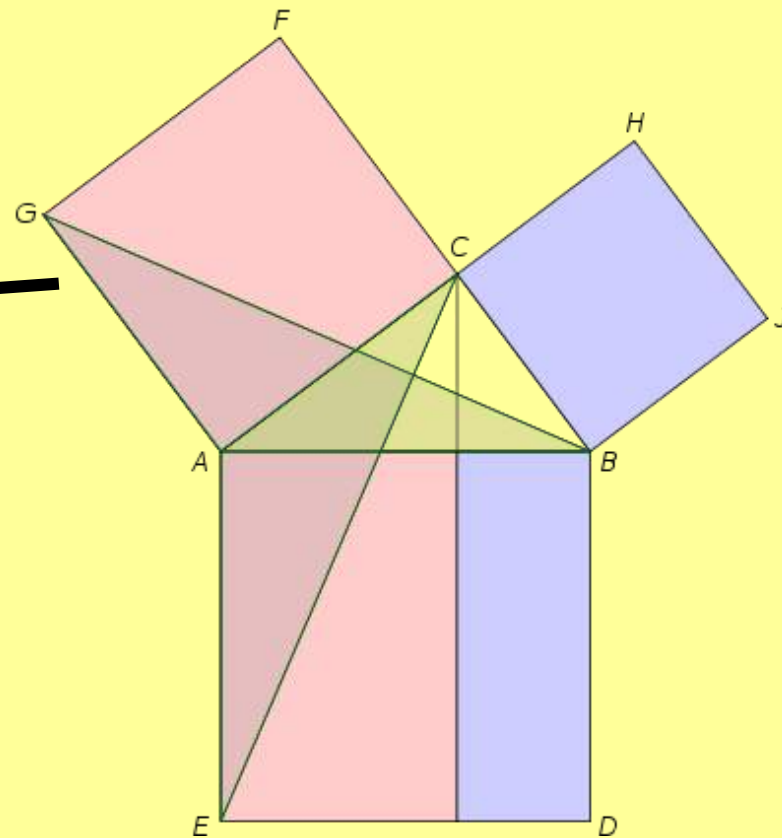
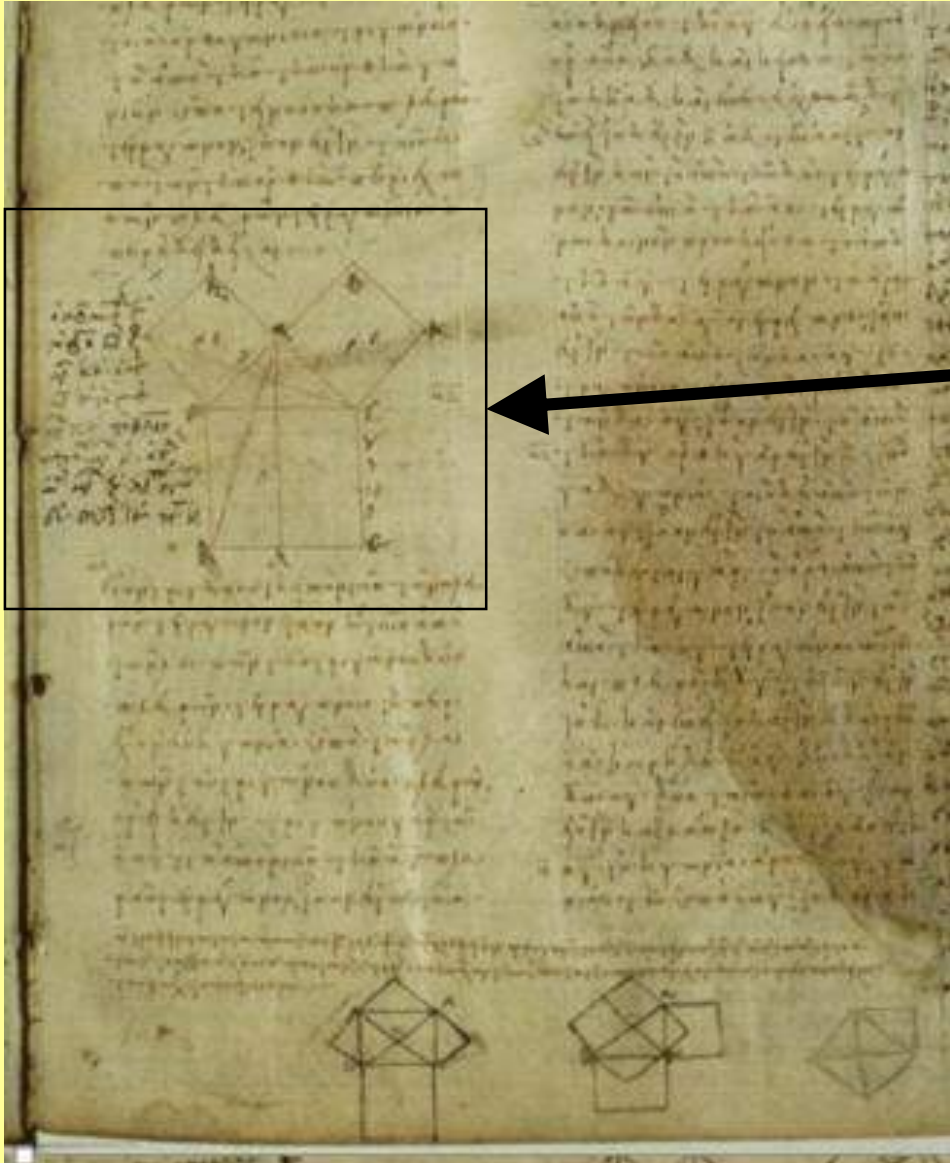
- Konstruiramo točku A, te analogno točku B.
- Zatim konstruiramo dužinu AB.
- Konstruiramo kružnice $k_1=(A, AB)$.
- Analogno koraku 3, konstruiramo kružnicu $k_2=(B, AB)$ (Postulat III. Neka je točka C sjecište točkova kružnice).
- Spojimo točku C sa A, te zatim spojimo i s B. (Postulat I)
- Time je nastao trokut ABC za kojeg tvrdimo da je jednakostraničan.



Dokaz:

- $AC = AB$
- $BC = AB$
- Iz ovog slijedi $AB = BC = AC$. Zaključujemo da je $\triangle ABC$ jednakostraničan.

Euklidov dokaz Pitagorinog poučka



- Originalan Euklidov doprinos u Elementima uključuje teoriju paralelnih linija, dokaz Pitagorinog teorema, dokaz beskonačnosti prim brojeva i Euklidski algoritam za nalaženje najvećeg zajedničkog djelitelja dva broja.
- Iako su se geometrijom bavili i prije Euklidovih Elemenata, deduktivni pristup je Euklidova zasluga.
- Euklid je pokazao da razvoj logične i stroge geometrije (i matematike) ovisi o osnovama (definicijama, postulatima i aksiomima).
- Za "Elemente" se kaže da je poslije Biblije u ljudskoj povijesti najviše proučavano, prevađano i tiskano djelo.

Euklidovi Elementi su jedan od najznačajnijih radova iz područja geometrije i generalne matematike.

William H. Losh: The Britannica Guide to GEOMETRY

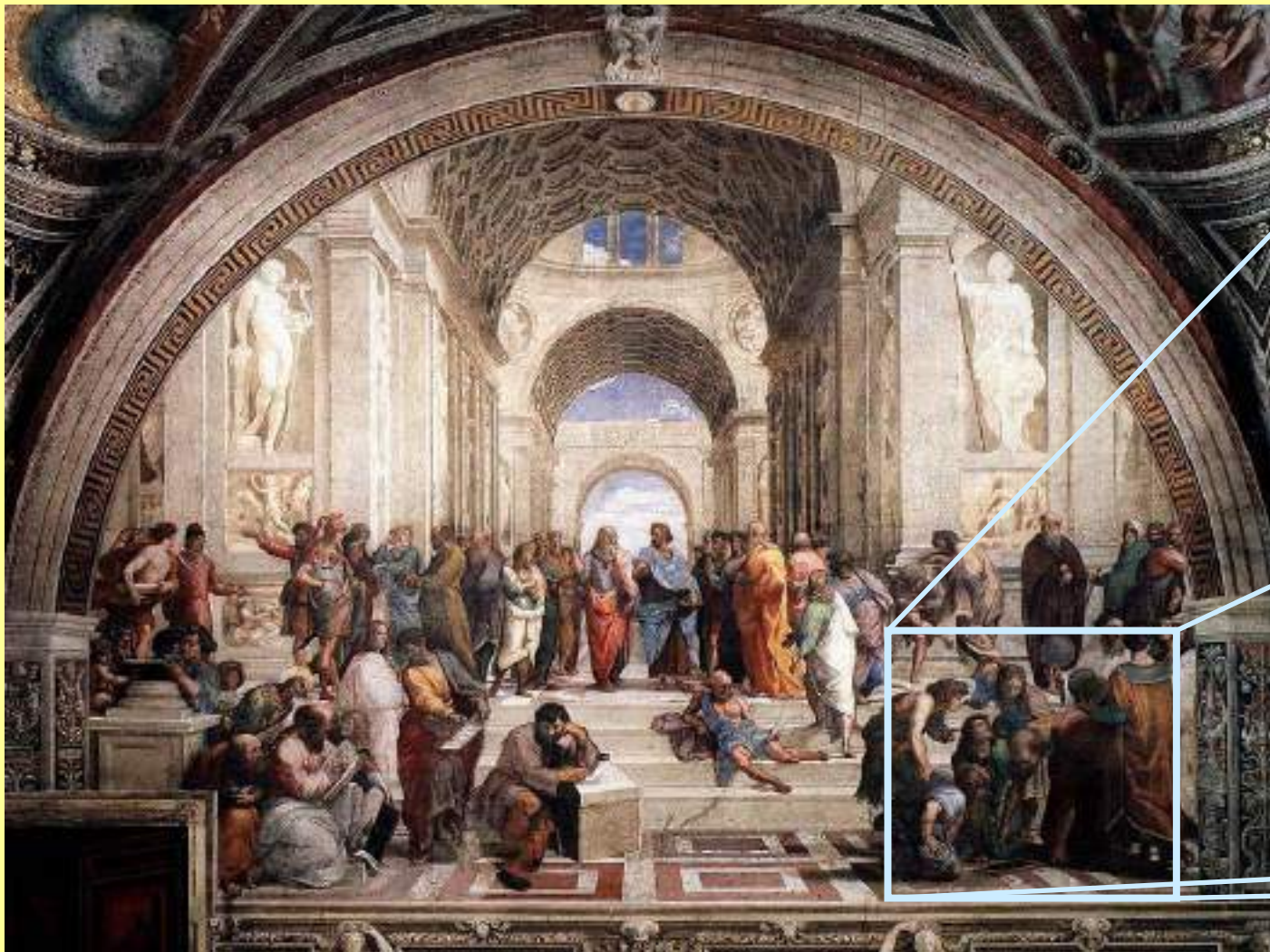
- Izvorno pisane Euklidove knjige Elemenata nisu sačuvane.
- Elementi su izvorno pisani na grčkom jeziku i prvo su prevedeni na arapski jezik, a tek u 12. stoljeću na latinski i druge jezike.
- Među prvima je prijevod na latinski napravio i Herman Dalmatinski, hrvatski znanstvenik i filozof porijeklom iz Istre.
- U vrijeme renesanse, Elementi su bili jedna od najviše korištenih knjiga.
- Elementi su postali uzor znanstvenog rada u svijetu znanosti i izvan okvira problema geometrije.

Oxyrhynchus papyrus

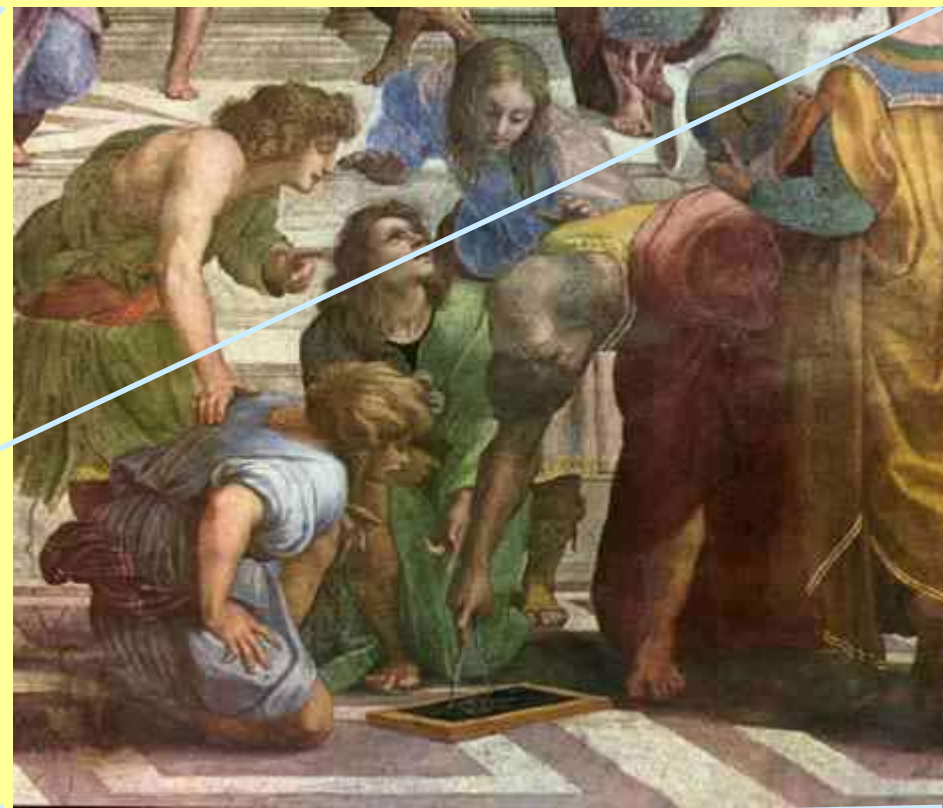
Jedan od najstarijih sačuvanih prijepisa Euklidovih Elemenata



Raphaelova freska - Atenska škola



Euklid podučava geometriju



Sadržaj:

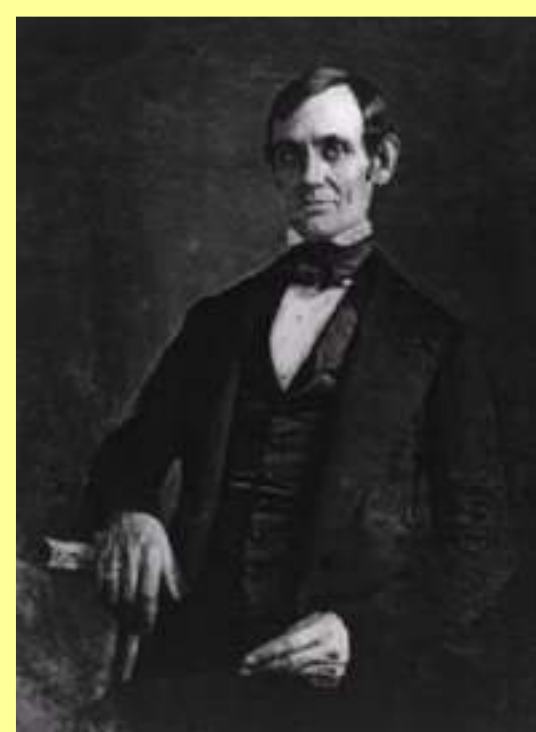
- Euklidov životopis
- Vremensko okruženje u kojem se Euklid javlja
- Euklidovo djelo
- **Euklidov utjecaj na temeljna znanja, suvremenike i na razvoj civilizacije**
- Euklidova ostavština

- U odnosu na druga znanstvena područja, geometrija je pojavom Euklidovih Elemenata dostigla zavidan nivo (oko 300 pr. Kr.).
- Od pojave Elemenata je u razvoju matematike dominirala geometrija (za razliku od, do tada dominantne, Pitagorine škole pristupa prirodi kroz brojeve).
- Euklid je u Elementima izlagao problematiku strogo deduktivno na osnovu definicija, postulata i aksioma i upravo zbog te dosljednosti, Elementi su stoljećima smatrani najsavršenijim matematičkim djelom.
- Mnoge generacije matematičara i drugih znanstvenika su učili iz Elemenata kako se logički zaključuje i kako se dobiveni zaključci uvode u nove dokaze.

Brojevi vladaju svijetom.
Pitagora

- **René Descartes** (1596.–1650.) je uveo koordinatni sustav, tj. bijekciju između skupa točaka euklidskog prostora (geometrijskih objekata) i koordinata.
- Operacijama sa koordinatama mogu se modelirati aksiomi Euklidske geometrije, a to je osnova metodološkog pristupa **analitičke geometrije**.
- U 19-om stoljeću su otkrivene nove neeuklidske vrste geometrije kao što je **geometrija Lobačevskog i Riemannova geometrija**. Riemannova geometrija je dio suvremene **diferencijalne geometrije**.
- **Bolyai, János** (1802.–1860.) je mađarski matematičar koji je neovisno otkrio hiperboličnu geometriju - **neeuklidska geometrija**.
- **Carl Friedrich Gauss** (1777.–1855.) je njemački matematičar koji je neovisno od Lobachevskog i Bolyae otkrio neeuklidsku geometriju.
- **David Hilbert** (1862.–1943.) je njemački matematičar koji je **razvio novi sustav aksioma za Euklidsku geometriju i na taj način riješio probleme koji su do tada bili pronađeni u Euklidovim Elementima**. Hilbert je dao popis od 23 matematička problema kojima je dao smjer razvoja matematici 20. stoljeća i ojačao logističku zasnovanost matematike.

- Euklidovi Elementi su ostavili dubok trag ne samo na znanost i uske znanstvene krugove, već i na obične ljude.
- Ljude su smatrali neobrazovanim ako nisu pročitali i poznavali Euklidsku geometriju i oko 200 godina nakon Euklida. Euklid je postao simbol znanja.
- U.S. predsjednik Abraham Lincoln je bio veliki poklonik Euklidovih Elemenata. Povjesničari kažu, da je koristio Euklidov pristup da bi našao put kroz svoja promišljanja i sumnje.
- Linkoln je u svom promišljanju uloge pravnika pri tumačenju i dokazivanju činjenica našao uporište u Euklidskim Elemenatima i Euklidskom pristupu.
- Linkoln je u svojim bilješkama zabilježio da su mu Euklidovi zapisi pomogli u izradi Proklamacije o ukidanju ropstva.



Sadržaj:

- Euklidov životopis
- Vremensko okruženje u kojem se Euklid javlja
- Euklidovo djelo
- Euklidov utjecaj na temeljna znanja, suvremenike i na razvoj civilizacije
- **Euklidova ostavština**

- Kroz stoljeća su matematičari razvili debatu dali je zaista potrebno 5 Euklidovih postulata da bi se zasnovala geometrija.
- Matematičari su nastojali dokazati da se peti postulat (postulat paralelnosti pravaca) može dobiti na osnovu prva četiri i da je on suvišan.
- Tek u kasnom 19. stoljeću (oko 1823. god.) tri matematičara (Bolyai, Lobachevsky i Gauss) su neovisno jedan o drugom, razvili neeuklidsku geometriju.
- Time je razbijen stoljetni mit da postoji samo jedna geometrija.

Do pojave neeuklidske geometrije na kraju 19. stoljeća, pojam geometrija je imao značenje:

geometrija = Euklidska geometrija

Neki od pojmova koji sadrže ime Euklida

- **Euklidska geometrija** - geometrija definirana aksiomima i pravilima iz Euklidovih knjiga Elemenata.
- **Euklidski prostor** - prostor koji zadovoljava Euklidove aksiome.
- **Euklidova norma** - duljina vektora; označava se $|\mathbf{v}|$.
- **Euklidska udaljenost (metrika)** - pravocrtna udaljenost između dvije točke u Euklidskom prostoru.
- **Euklidovi aksiomi** - aksiomi iz Euklidske knjige Elemenata.
- **Euklidov algoritam** - postupak kojim se određuje najveća zajednička mjera dvaju cijelih brojeva, dvaju polinoma ili dviju dužina.
- **Neeuklidske geometrije** - svi geometrijski sustavi koji se izborom aksioma razlikuju od euklidske geometrije.

- Današnja elementarna geometrija se u malo čemu razlikuje od geometrije izložene u Euklidovim Elementima. Međutim, mnoge definicije su modificirane i doradene (tačka, pravac i dr.).
- Matematika je univerzalni jezik. Euklid je svojim logičkim pristupom od matematike napravio objektivni jezik koji slijedi deduktivnu logiku aksioma i postulata.
- Euklidovi Elementi su utjecali na rad niza znanstvenika kao što su Descartes, Newton, Gauss i drugi. Utjecali su na razvoj znanstvenih područja i na metodiku pristupa rješavanja znanstvenih problema te na razvoj sveobuhvatnog znanja kojeg danas imamo.
- Geometrija se u svojim početcima razvijala na osnovu praktičnih i vjerskih potreba premjera zemljišta (iskolčenje piramida, hramova, određivanje njihovih visina i dr.). U to vrijeme geometrija i geodezija (izmjera zemljišta) imaju isti izvor ali su se kasnije razvili u zasebne discipline.
- Euklid je od izmjere zemljišta, odnosno geometrije napravio analitičku disciplinu.
- Euklid i njegovi suvremenici su za razvoj geometrije (**izmjere zemljišta**) imali na raspolaganju samo ravnalo (**štap ili konopac**) za mjerenje dužina i šestar (**konopac**) za crtanje kružnica i lukova te "mjerenje" kutova.
- Nažalost, u geodeziji i geoinformatici se danas malo eksplicitno citiraju Euklid i njegove postavke, a razlog je jer su današnje metode i instrumentarij koji se koriste za rješavanje geodetskih problema znatno drugačije od metoda konopca i štapa.

**Prirodni zakoni su matematička
promišljanja Boga.**

Euklid

